

高屏地區國小低年級負整數概念之研究

A Study of Negative Integer Understanding Among lower Graders in Elementary Schools in the Kaohsiung-Pingtung Area

李欣樺*
Hsin-Hua Li

詹勳國**
Hsun-Grow Chan

(收件日期 106 年 7 月 5 日；接受日期 106 年 10 月 5 日)

摘 要

本研究旨在探討高屏地區國小低年級的負整數概念，參考 2014 年一篇研究美國加州國小一年級學生負整數概念的期刊論文，製作一份負整數概念問卷，進行施測與資料收集分析，共蒐集 395 份有效問卷，包含高雄市 106 份、屏東市 198 份以及屏東縣 91 份，之後訪談了 8 位學生，得到以下結論：

- 一、高屏地區低年級學生普遍沒有負整數概念。
- 二、高屏地區低年級學生的負整數概念存在地區性差異。
- 三、高屏地區二年級負整數概念明顯優於一年級。
- 四、高屏地區低年級與加州一年級學生「原生」負整數概念沒有差異。
- 五、透過溫度情境、兄弟言論、題目敘述本身、減法變型、訪談中誘發、可以觸發少數學生自我形成正規負數概念。

關鍵詞：國小低年級學生、負數概念

* 國立屏東大學應用數學系

** 國立屏東大學應用數學系教授（通訊作者）

Abstract

The purpose of this study is to explore the negative integer concepts of lower graders in elementary schools in the Kaohsiung-Pingtung area. We made a questionnaire based on the 2014 article, “Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders’ Mental Models” in the “Journal for Research in Mathematics Education”. After collecting 395 pieces of data including 106 responses from Kaohsiung City, 198 responses from Pingtung City and 91 copies from Pingtung County, as well as interviews with 8 students, we obtained the following results: First, lower grade students from the Kaohsiung-Pingtung area generally have little concept of negative integers . Second, we found regional differences in negative integer understanding among lower graders from the regions of Kaohsiung and Pingtung. Third, the negative integer concepts of second graders are significantly better than those of first graders. Fourth, there is no difference in original negative integer understanding between the lower graders in the Kaohsiung-Pingtung area and first graders in the California area before teaching. Fifth, temperature situations, siblings’ conversations, narrative of problems, subtraction transformation, and the interview itself triggered a few students to form a formal negative concept.

Key words: Lower Grader in Elementary School, Negative Integer Concept.

壹、緒論

美國數學教育研究期刊是國際有關數學教育最有影響力的期刊之一，2014 年刊載一篇論文「國小一年級負整數概念心智模型研究」，內容深刻的探討美國加州國小一年級負整數概念心智模型，美國普渡大學作者 Bofferding (2014) 教授使用實驗教學研究法，研究 61 個國小一年級的學生，討論負整數、大小以及負整數在數線上方向的相關問題，以建立心智模型。研究方法以前測、實驗教學和後測方法得到研究結果，目的是要確認學生對整數的心智模型，並調查這些模型如何隨著不同教學模式而改變。

「-」符號有多重意義，第一個可以代表減號，如同 $6-2=4$ 。第二種可以代表負號，如同負數 -3 。第三種可以代表相反數（對稱），如同 $-(X-5)$ 。凡是有多重意義的數學符號，都容易對學生與學習帶來困惑與障礙，例如，國小「分數」就帶有多重意義，它是國小數學最困難的內容之一，負數課程有著類似的多元意義困難，因此，研究學生負數概念學習的狀況有其重要性，特別是「原生」(original) 負數概念的認知心智模型。

臺灣的數學課程把負數相關課程編排在 7 年級，九年一貫數學課程（教育部，2008）中的能力指標為：

N-4-05 能認識負數、相反數、絕對值的意義。

N-4-06 能做正負數的比較與加、減、乘、除計算。

N-4-07 能將負數標記在數線上，理解正負數的比較與加、減運算在數線上的對應意義，並能計算數線上兩點的距離。

N-4-08 能熟練正負數的四則混合運算。

國內負數的教學順序為，先認識負數、相反數、絕對值的意義，然後比較正、負數大小以及正、負數對應在數線上的概念，最後才進行正、負數的四則運算。國中數學的第一單元就是負數，國小沒有負數課程，短時間國中生就要學習到負數運算，容易感到挫敗影響數學信心。因此如果能考慮將負數某些課程，例如，認識負數、相反數、比大小等課程移到小學數學課程中，拉長學習時間，學生對於負數概念就會比較清楚，相對地正負數的運算就會比較容易。

一般而言，國際上負數課程最早安排在小學四年級，Bofferding (2014) 針對小學一年級的研究相當大膽，因此啟發本研究先模仿與複製它的前測，並利用已經建議立的心智模型，在同樣未受到負數教學影響下，探討臺灣低年級的負數原生想法，以及觸發學生自發與理解負數概念的情況，並與加州學生負數教學前心智模型分佈情形比較，之後再進行教學方面的重製實驗，當然也是因為全面重製她的實驗工作浩大且耗時。另外，國際比較原生數學認知概念並不是全新議題，Ginsburg、Choy、Lopez、Netley 與 Chau-Yuan (1997) 花了 2 年時間調查了 5 個國家（日本、中國、哥倫比亞、韓國與美國）不同種族入學前孩子的數學概念，結論得到「美國和亞洲的小孩數字概念差別不大」。

本研究可以視為延伸「負數教學前」（入學前）的比較，除能了解觸發學生「自我形成」與「自明」負數概念的方式、契機、情況，也能觀察比較一與二年級，隨著年齡增

加的是否有認知發展的差異。

小學負數課程等相關研究並不多，大多數的負數課程研究都著重在國中。黃建榮(2004)曾經對國小五、六年級的學生進行四堂課的教學與施測，其教學設計是利用生活中的經驗與負數來做連結並且分組進行有趣的競賽活動，讓學生能參與完整的課程，實驗證明國小高年級進行負數概念教學是可行的。

負數課程包含值、排序比較大小以及四則運算等，臺灣的學生要在短短時間之內學完整個負數概念課程，對於大部分學生來說是有些困難的。既然 Bofferding 教授這篇文章可以對美國小學一年級學生進行前、後測與負數教學課程，而且得到不錯的成績，我們也可以對國內低年級學生實施調查研究，因此，本研究參考該文章內容，設計一份整數概念（包含負整數、0、正整數）問卷進行施測，以了解低年級學生的負整數概念，最後提出結論與建議。基於以上討論，本研究目的為：

- 一、探討高屏地區低年級受測學生的負整數概念，與自發形成可能情形。
- 二、探討高屏地區低年級受測學生的負整數概念有無地區、年級與其他相關差異。
- 三、比較高屏地區低年級受測學生與加州一年級受測學生負整數概念心智模型。
- 四、觸發學生「自我形成」與「自明」負數概念的方式、契機、情況為何？

貳、文獻探討

全數 (whole number) 的集合包含 0 與自然數，整數對於全數的補集就是負整數。人類只要有簡單的社會活動，日常生活就會產生負數，例如：左邊與右邊、上與下、收入與支出、利益與虧損…等。另外，只要數學文化發展到一定程度，為了計算需要，也會產生負數。因為解方程式過程中出現不夠減的情形，所以產生正負數加減運算規則。世界各地的數學發展遇到困難，既有的正整數無法解決，所以分別都會創造負的想法來解決。中國、印度阿拉伯、以及西方文化都發展出負數概念。

負數概念課程被安排在教育的哪個階段？全世界有不同，美國加州 4 年級時就進入負數課程，中國課程標準安排 4 至 6 年級開始介紹負數，課程內容是簡單了解負數，並會用負數表示生活中的問題，最初並無太複雜的負數運算。日本、新加坡、韓國以及臺灣都是 7 年級才進入負數課程。表 1 可知亞洲大部分的國家都安排負數課程在國中實施，只有中國把負數課程安排至小學四年級進行教學。

黃建榮(2004)曾經對國小五、六年級的學生進行四堂課的教學與施測，教學設連結生活的經驗與負數，並且分組進行有趣的競賽活動，讓學生能參與完整的課程，自製學習單、紙筆測驗以及訪談。研究發現，對於五、六年級學生來說在「負數的大小比較」、「負數的位置」以及「負數在生活中的應用」中的表現比較好。負數的加減運算，例如「正+負」、「負+正」以及「負+負」等運算，對五、六年級學生而言比較有挑戰性。由此可知，簡單負數相關概念的建立，例如「負數的比大小」、「負數在數線上的位置」以及「在生活中的負數」等概念對於小學生來說是可接受的；而較困難的負數的加減運算，像是

「正+負」、「負+正」以及「負+負」等概念可以編排在 7 年級中教學。

表 1. 各國負數課程安排

國家	年級	負數能力指標
加州	4	使用負數（含數線、計數、溫度）
中國	4~6	會用負數表示生活中的問題
日本	7	關於正負數，要透過具體的現場活動加深學生的理解，並學會四則運算： (1) 了解負數的必要性及正負數的意義 (2) 理解正負數的四則運算，且能夠進行簡單的計算
新加坡	7	操作正數、負數、和零，包含在數線上排序
臺灣	7	能以正、負表徵生活中相對的量並認識負數是性質（方向、盈虧）的相反
韓國	7	能理解整數與有理數之間的大小關係（絕對值、正數、負數）

（陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛、魏士傑、舒宇宸、姜志遠、翁婉珣、黃子倩、洪雅齡，2005）

反觀已在國小實施負數教學的中國，課程透過學生的日常生活經驗，讓學生了解負數存在的價值與負數的意義，國中簡單複習一下負數概念，就可以直接介紹正負整數四則運算，如此既可減輕學生負擔，又可以符合布魯納所提出的螺旋式課程，配合學生的認知結構，促進學生的認知能力，並且隨著年級，重覆出現負數概念並且逐漸加廣加深（陳嘉陽，2012）。因為負數學習的困難，所以有些國內研究專注於國中學生在補救、學習障礙、遊戲、與教學模組方面的探討，蔡德吉（2002）研究國一學生的負數概念，發現學生的負數概念呈現表徵有相當多元的表現，處理含負數乘法的運算時，大部分學生以符號法則來說明，最後研究顯示國一學生在將負數乘法形式規則與生活情境連結時是有困難的。

Hativa and Cohen (1995) 有個實徵研究，將兩班國小四年級學生分成控制組與實驗組，透過電腦自主學習解決困難數學題目，研究發現負數教學前學生已經帶有負數直覺與相關非正式知識，以及可以操作簡單運算，實驗教學顯著有效，低成就學生可以跟上負數知識的教學，但是執行負數運算時就顯示出非常困難。

Vosniadou and Brewer (1992) 解釋學生在心智數線模型概念上分成三個類型：

一、初始 (initial) 階段：

完全利用全數理論框架回答負數概念問題，嚴重被全數理論制約，以正數量解釋帶有負號數字意義，將 0 視為最小數字，沒有能力處理比 0 小的數字概念。

二、合成 (synthetic) 階段：

有能力處理比 0 小的數字概念，仍然以全數理論框架為基礎，認為離 0 越遠的數字越

「高」越「大」，無法比較負數大小。認為減號的一元意義會相反的排序負數，因此負數往數線的右邊會有較高的絕對值（例如，-8，-9，0，1）。

三、正規 (formal) 階段：

能解釋在連續或連續數線的整數以及 / 或方向量，不只明確地把 0 當作邊界點，不再認 0 為最小的數字，並且能結合小於 0 觀念去排序負數，擴大他們的數概念。擴大了減法概念的意義，讓較小的正數或負數（較小指的是接近零）可以減對應大一點的正數，例如， $3 - 5$ 或 $-3 - 5$ ）。

Bofferding (2014) 教授透過觀察與訪談，增加兩個階段並以此作為實驗教學研究的基本模型。

四、轉變 I (transition I) 階段：

學生使用衝突價值的心智模型，有時正確的了解哪個整數是最大或最小，尤其是當在比較正數以及負數對時，有時仍錯誤的使用絕對值來決定負數。所以歸類轉變 I 介於初始與合成階段之間。

五、轉變 II (transition II) 階段：

學生似乎了解負數是小於零的數，可以在數線上往負方向計數，以及正確的填入負數。能正確的排序兩個整數，或是正確的排序兩集合，但有時不能確認哪個整數比較大。因為不一致認定整數的正確值，所以歸類轉變 II 介於合成與正規階段之間。

綜合以上 5 階段，Bofferding (2014) 教授整理與製作表 2，本研究也將使用此表格作為分類學生「負數概念」的模型，並與加州學生結果比較。

表 2. 整數值以及次序心智模型

次序以及數值心智模型	概述	
初始：	全數	忽略負整數或是把負整數當成正整數
	絕對值	依照正數值來排序負整數
轉變 I：	價值衝突	把負數當成負數以及正數
合成：	量	次序以及數值的反向負數
轉變 II：	雙重價值	相反的看待負數並給予正確的值
	不穩定整數	正確的使用負整數（帶有 2 個矛盾）
正規：	整數	在 0 的周圍，負數與正數對稱

（Bofferding (2014)，第 222 頁）

Bofferding (2014) 教授先實施前測了解學生之整數心智模型數據，再實施 2 周 8 堂課

的實驗教學，觀察學生的反應，最後使用後測了解學生的心智模型之轉變，得到統計數據如表 3。經過教學後沒有學生心智模型退步，大部分的學生至少都有進步到下一個階段。由此可知，一年級學生是有能力學習負整數概念，尤其是整數值、次序概念，一年級學生是可以接受，而且教學成效佳。

表 3. 學生整數值與次序觀念之心智模型之前後測人數分布表

	初始	轉變 I	合成	轉變 II	正規
前測	47	5	1	1	7
後測	17	9	4	6	25

但是實驗教學後對於整數方向量概念進步不大，縱然學生了解整數值、次序概念並且可以回答相關問題，但是無法回答方向量問題，這代表學生無法自行延伸到整數方向量概念。雖然一年級學生是有能力學習負整數概念，但課程並不適合安排在一年級，因為仍有一部分學生經過教學後停留在初始階段，換言之，考量整體兒童負數認知成熟度下，加州數學綱要安排四年級才開始負數概念課程。

參、研究設計與方法

一、研究對象

本研究對象為屏東縣、屏東市、高雄市三個區域的三所國小一、二年級學生合計 16 個班共 417 人，分配情形如表 4。

表 4. 研究對象分配表

縣市	屏東縣	屏東市	高雄市
學校	A 小學	B 小學	C 小學
參與班級數（一年級）	2	4	2
參與班級數（二年級）	2	4	2
參與人數	95	213	109
無效樣本	4	15	3
有效樣本	91	198	106
備註	非都會區	都會區	非都會區

B 小學為屏東市某實驗小學，相對 A 小學與 C 小學學校環境與學生家長社經狀況偏高。

研究者施測時，A 小學有兩班的導師使用榮譽卡方式進行班級經營管理，凡是學生有正向行為者頒發一枚榮譽卡，凡是學生有負向行為者則須交還老師一張榮譽卡，若是學生

已無榮譽卡（0張），班導使用「欠卡」來說明這個情形，該教室黑板有個小角落上寫姓名以及正字標記，來記錄學生欠卡次數，這和負數概念有關。本研究假設這經驗會影響學生的負整數概念，將比較 A、C 學校有無實施榮譽卡制度與負整數概念的異同。

二、研究工具

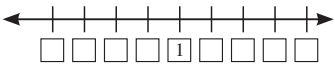
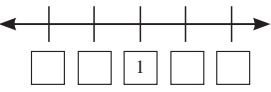
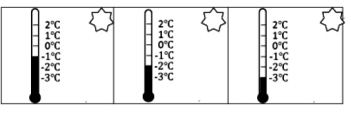
本研究參考與修正 Bofferding 論文提到的概念與問題，利用已經發展成熟具有信、信度的負數概念問題，設計「整數概念問卷」第一版，因為臺灣負數課程安排在國中一年級，所以專家效度之一請有經驗的國中老師提供，經過專家與國中教師審查與檢核，修改意見如表 5 完成第二版。因為施測對象是國小低年級學生，因此問卷题目的合理與適性，請經驗豐富的國小老師檢驗，第二版國小教師建議：（一）給低年級學生寫的問題須加注音符號。（二）版面配置需調整。改善後完成「整數概念問卷」。

此問卷有 2 部分共 5 題 14 格答案，其中 7 格：1-1、1 的前面是 (0)；2-2、答案為 (0)；2-3、答案為 (1)；2-4、答案為 (3)；3-1、6 和 2 比大小；3-2、3 和 0 比大小；4-1、選贏的分數 6 和 0；屬於全數概念題目，每格 1 分，滿分為 7 分，得分定義為學生全數概念分數。

另外 7 格：1-2、0 的前面是 (-1)；2-1、答案是 (-1)；3-3、-1 和 5 比大小；3-4、-2 和 -6 比大小；4-2、選贏的分數 -3 和 5；4-3、選贏的分數 -4 和 -2；5-1、最低負數溫度；屬於負整數概念問題，每格 1 分，滿分為 7 分，得分定義為學生負整數概念分數。整份問卷總分 14 分定義為學生整數概念分數。

訪談大綱依序詢問學生問卷問題，並請學生解釋。你怎麼知道的？你為什麼要圈這個答案？你如何選出這個答案？

表 5. 試題初稿之專家檢核及修改建議

原試題題目	修改後試題題目	修改建議
往前數 請小朋友盡可能地從 4 開始往前數。並問小朋友你可以再往前數嗎？有沒有其他的數比它還要小呢？	往前數 3 的前面是 2、2 的前面是 1、1 的前面是 ()、0 的前面是 ()。	小朋友可能會誤解從 4 往前數的意思，建議把題目明確化。
請在空格處填入數字 	請在空格處填入數字 	原本題目空格數太多，看起來較複雜。
請將這些數字卡由大排到小	以下溫度哪一個最冷？ 請在框框中打 V 	刪掉原本題目改成新題目，由於原本題目空格數太多，且考量學生沒有經過負數課程學習，所以把原題目刪掉改為較貼近日常生活的溫度的題型。

原試題題目	修改後試題題目	修改建議
請問哪個數字最大？你是怎麼知道的？ (1)6 和 2 (2)3 和 0 (3)-1 和 5 (4)2 和 -6	請問哪個數字最大？ 請把大的數字圈起來 (1)6 和 2 (2)3 和 0 (3)-1 和 5 (4)-2 和 -6	此大題更動了第 4 小題，想藉此了解學生對於兩個負數的大小關係的情況。
有兩個小朋友在玩遊戲，請問誰是最後的贏家？說說看你是怎麼知道的？ (1) 小明：6 分 小美：0 分 (2) 大雄：-3 分 小夫：5 分 (3) 小英：-4 分 小林：2 分	有兩個小朋友在玩遊戲，請問誰是最後的贏家？ (1) 小明：6 分 小美：0 分 (2) 大雄：-3 分 小夫：5 分 (3) 小英：-4 分 小林：-2 分	此大題更動了第 3 小題，想藉此了解學生對於兩個負數的大小關係的情況。

正式施測問卷後，根據任課教師提供的建議，挑選出一二年級高、低程度各 2 位學生進行半結構性訪談，共晤談 8 位受試學生。訪談者在受測學校之一擔任低年級導師二年經驗，訪談大綱依序詢問問卷問題，並請學生解釋你怎麼知道的？你為何圈這個答案？你如何選出這個答案？

肆、結果與討論

一、基本問卷資料分析

本研究共蒐集 395 份有效問卷，包含高雄市 106 份、屏東市 198 份以及屏東縣 91 份。全數概念題目 7 格，與負整數概念 7 格之答對率分配如表 6。

表 6. 「整數概念問卷」題目答對率之百分比分配

	題 目	答對率類別
題目一（整數倒數問題）	第一格 (1-1)	87.1% 全數
	第二格 (1-2)	12.2% 負數
題目二（數線次序問題）	第一格 (2-1)	8.6% 負數
	第二格 (2-2)	52.7% 全數
	第三格 (2-3)	80.5% 全數
	第四格 (2-4)	79.5% 全數

題目	答對率類別	
題目三（整數值問題）	第一題 (3-1)[正數 vs 正數]	87.6% 全數
	第二題 (3-2)[正數 vs 零]	87.1% 全數
	第三題 (3-3)[負數 vs 正數]	84.8% 負數
	第四題 (3-4)[負數 vs 負數]	12.4% 負數
題目四（情境整數值問題）	第一題 (4-1)[正數 vs 零]	99.5% 全數
	第二題 (4-2)[負數 vs 正數]	95.2% 負數
	第三題 (4-3)[負數 vs 負數]	21.8% 負數
題目五（情境整數值問題）	第五題	91.9% 負數

整數概念問卷所有題型中，從表 6 發現：

- (一)「整數倒(著)數問題」有將近八成七的學生知道 1 的前面是 0，而只有一成二的學生知道 0 的前面是 -1。
- (二)「數線次序問題」有八成的學生知道 1 的右邊分別是 2、3，約五成的學生知道 1 的左邊是 0，而 0 的左邊是 -1 答對率僅有八點六個百分點。
- (三)「整數值問題」正數 vs 正數、正數 vs 零、正數 vs 負數類型答對率都有八成五以上，但是負數 vs 負數類型答對率僅有十二個百分點。
- (四)「情境整數值問題」的正數 vs 正數、正數 vs 零答對率都有九成五以上均優於「整數值問題」的正數 vs 正數、正數 vs 零；「情境整數值問題」的負數 vs 負數答對率二成二，也優於「整數值問題」的負數 vs 負數類型。
- (五)「情境整數值問題」為三選一的題目，故答對率約九成。由表 6 可知學生的整數概念中以全數概念表現較好，負數概念表現較差；而關於溫度計生活情境問題，學生的答對率最好。

二、量化資料分析

(一) 地區性學生整數、負整數與全數概念比較

研究對象郊區學校 A 與 C 位處海邊經濟活動不發達，樣本數共為 197。市區學校為屏東市某實驗小學共 8 班，樣本數為 198。全數概念題目 7 格，與負整數概念 7 格，每格 1 分，合起來 14 分視為整數概念得分數。

1. 整數概念

郊區學校的樣本平均數為 8.66、標準差為 1.832；市區學校的樣本平均數為 9.35、標準差為 2.054。t 值為 3.490，P 值為 $0.001 < 0.05$ ，即郊區學校及市區學校之整數概念存在顯著差異。

2. 負整數概念

郊區學校的樣本平均數為 3.05、標準差為 0.968；市區 B 學校的樣本平均數為 3.48、標準差為 1.309。t 值為 3.749，P 值 $<0.000 < 0.05$ ，即郊區學校及市區學校之負整數概念存在顯著差異。

3. 全數概念

郊區學校的樣本平均數為 5.61、標準差為 1.338；市區學校的樣本平均數為 5.86、標準差為 1.332。t 值為 1.857、P 值為 $0.064 > 0.05$ ，即郊區學校及市區學校之全數概念不存在顯著差異。

(二) 一年級與二年級之整數、負整數與全數概念比較

本研究問卷之有效樣本，共有 3 所學校、16 個班級、總計 395 名學生。其中，一年級有 191 人、二年級有 204 人。

1. 整數概念

一年級的樣本平均數為 8.82、標準差為 1.893；二年級的樣本平均數為 9.19、標準差為 2.035。t 值為 -1.865，P 值為 $0.063 > 0.05$ ，即一年級與二年級之整數概念不存在顯著差異。

2. 負整數概念

一年級的樣本平均數為 3.12、標準差為 0.969；二年級的樣本平均數為 3.41、標準差為 1.319。P 值為 $0.014 < 0.05$ ，即一年級與二年級之負整數概念存在顯著差異。

3. 全數概念：

一年級的樣本平均數為 5.70、標準差為 1.422；二年級的樣本平均數為 5.78、標準差為 1.258。t 值為 -0.616、P 值 $0.540 > 0.05$ ，即一年級與二年級之全數概念不存在顯著差異。

(三) 是否實施榮譽卡之負整數概念比較

郊區學校 A 有 2 班實施榮譽卡制度，假設「欠卡」經驗會引導學生負數概念，因為市區學校與 A、C 學校存在地區性顯著差異，所以將實施榮譽卡制度 A 學校 2 班的樣本數為 42、樣本平均數為 3.07、標準差為 0.64。與無實施榮譽卡制度郊區學校學生樣本數為 155、樣本平均數為 3.05、標準差為 1.04 做比較，t 值為 -0.156、P 值 $0.876 > 0.05$ ，二者之負整數概念不存在顯著差異。

雖然大部分自發性負數概念來自「生活經驗」，研究期間發覺有 2 班實施榮譽卡制度，黑板上留有「欠卡」，便假設該經驗會激發學生「負數概念」，經過統計比較得知並沒有這現象。研究者認為「經驗強度不足」、「無教學引導與提示」與「兒童認知能力尚未適合」三者因素有關，所以並沒有產生差異。

(四) 高屏地區低年級學生「全數概念」與「負整數概念」相關檢驗

高屏地區 395 個樣本都有全數概念總分與負數概念總分，經過皮爾森相關係數計算，

全數概念與負數概念的相關係數為 .234，P 值 <0.001 ，達到 .05 顯著水準，表示全數概念總分與負數概念總分呈顯著低度正相關。

三、質化結果分析

(一) 訪談結果分析

一、二年級學生數學學習成就表現極為接近，每班導師依據在校數學段考與平時表現，推薦高成就與低成就每年級各 2 名學生進行晤談，編碼分別為一年級 S11、S12、S13、S14 與二年級 S21、S22、S23、S24。探究學生的整數概念，最後以表 2 的心智模型歸類學生所屬的階段：

訪談 S11 摘要與解析：

T：... 你怎麼知道 1 的前面是 0？

S11：看計算機阿

T：看計算機？計算機哪裡可以看出來 1 的前面是 0？

S11：倒(著)數阿！

T：倒(著)數？所以 1 倒(著)數再來就是？

S：0

T：那 0 的前面是？

S11：負一

T：你怎麼知道是負一？

S11：再按一次就變成負一阿

T：你怎麼知道 1 的前面這個符號叫做負？還記得嗎？還是有誰告訴你？

S11：應該是我自己看的

T：可是自己看怎麼會知道那個符號叫做負？

S11：應該是我哥哥講的，然後我聽進去的

S11 喜歡操作計算機，所以知道數值排序 0 之前仍有數字，記得哥哥說過知道負號發音。

T：第四小題，-2 和 -6 誰比較大？

S11：-6

T：為什麼

S11：因為 6 比 2 大，所以 -6 比較大

但是無法真實了解負數意義，對於負號視而不見，因此，無法比較大小。

T：第五題，下面有三支溫度計，哪一支的溫度最低？

S11：第三支

T：為什麼

S11：因為它最低阿

T：最低？

S11：因為黑色的它最低，所以它溫度比較低。

這題幾乎全部學生都答對，訪談中所有學生都以視覺高度回答，並無連結負數刻度。

整理 S11 的晤談內容，發覺：1.S11 過去從未學習過負數；2. 學生知道負數是因為玩計算機，而知道負數與負號發音是哥哥告訴他；3.S11 視「-」為不見，直接比較數字大小；4. 數線排序問題把數字反向排列(3, 2, 1, 0, -1)。由以上 4 點，判斷 S11 屬於轉變 I 心智模型。

訪談 S12 摘要與解析：

T：你怎麼知道？

S12：因為 0、1、2、3。

T：那 0 的前面是什麼？

S12：0.1。

T：你怎麼知道？

S12：用猜的。

S12 認為 0 之前有數字，猜測他不瞭解但知道的小數 0.1，誤認它比 0 還小，所以回答 0.1 在 0 之前。

T：第三題，這 (-1) 是什麼數字？

S12：減一。

T：那你覺得減一和 5 誰比較大？

S12：5。

T：為什麼？

S12：因為減 1 就是減掉了 1，所以比較少。

T：然後？

S12：然後 5 比減掉了 1 大，所以 5 是比較大。

S12 能說出負數意義。

T：好，第四題，這個 (-2) 是什麼？

S12：減 2。

T：這個 (-6) 呢？

S12：減 6。

T：那減 2 和減 6 誰比較大？

S12：減 6...，啊我寫錯了。

T：為什麼？

S12：減掉 2 跟減掉 6，應該是減 2 比較大。

T：為什麼？

S12：因為減掉 2 跟減掉 6 比當然是減掉 2 比較大，因為只有減 2 而已。

S12 當場發覺認知衝突，並進行自清，正確回答答案。

S12：這題也寫錯了。

T：為什麼？

S12：因為小英減 4 分，小林減 2 分，應該是小林贏。

T：你怎麼知道的？

S12：因為小林減得比較少阿。

剛剛 S12 的自清是有意義而且延續。整理 S12 的晤談內容，發覺：1.S12 過去未學習過負數；2. 稱「-」為減；3. 比較整數大小時，解釋減 2 為減掉 2、減 6 為減掉 6，所以減掉的數字較大，出來的值就會較小，反之減掉的數字較小，出來的值就會較大；4. 雖然該學生能正確辨別整數大小，但是在數線排序上卻出現對稱 (3, 2, 1, 2, 3) 情況。由以上 4 點，判斷 S12 屬於轉變 II 心智模型。

訪談 S13 摘要與解析：

T：好，那為什麼這裡（數線上的第 2 格）要填 0 呢？

S13：因為 1 的前面沒有東西。

T：因為 1 的前面沒有東西，所以要填 0？

S13：對。

T：那你覺得這裡（數線上的第 1 格）要填什麼？

S13：“沒有”。

T：0 的前面還有數字嗎？

S13：“沒有”。

T：那你怎麼沒寫上去？

S13：我本來有寫，可是擦掉了。

T：為什麼要擦掉？

S13：因為我怕我會寫不對。

T：因為你怕會寫不對，所以就把它擦掉了是不是？

S13：恩。

T：所以你這裡的答案是‘沒有’？

S13：恩。

S13 認為 0 是邊界，0 的另一邊沒有其他數字。

T：你怎麼知道是 6？

S13：因為 2 比較小，只有兩個（圈圈），6 有六個圈圈。

T：2 有幾個圈圈？

S13：兩個。

T：那 6 有幾個圈圈？

S13：六個。

S13 數字概念仍在象徵期，無法抽象操作，需要用圈圈代替操作。

T：好，那你有沒有看過這個數字？你覺得這個數字要怎麼唸？

S13：減 1。

T：你覺得這個是減 1？

S13：恩。

T：好，那你覺得減 1 和 5 誰比較大？

S13：5。

T：為什麼？

S13：因為有 5 個圈圈，這個 (-1) 只有一個。

T：減 1 只有一個圈圈是嗎？

S13：恩。

T：所以是 5 比較大？

S13：恩。

「減 1」是非常普遍與直接的回答。

T：好，再來第四題，這是 (-2 和 -6) 什麼數字？

S13：2 和 6。

T：是嗎？可是它前面有一個東西。

S13：減。

T：所以是？

S13：減 2 和減 6。

T：那你覺得誰比較大？

S13：6。

T：那你是怎麼比的？

S13：我就看數字。

T：你就是沒有看前面的減，只有看數字？

S13：對。

T：所以你是比 2 跟 6 誰比較大是嗎？

S13：恩。

整理 S13 的晤談內容，發覺：1. 對於未學習過的數學感到沒有信心，會害怕自己寫錯；2. 認為 0 的左邊沒有數字的存在；3. 過去從未學習過負數；4. 稱「-」為減；5. 視「-」為不見，直接以絕對值比較數字大小，以圈圈來解釋誰多誰少；由以上五點判斷該學生為初始心智模型。

訪談 S14 摘要與解析：

T：你怎麼想？

S14：頭腦。

T：用頭腦想就直接寫出來是 0 ？

S14：恩。

T：那 0 的前面是什麼？

S14：00。

T：那 00 的前面是什麼？

S14：00。

S14 自創一個符號「00」代表 0 之前的數字。

T：第二小題，3 和 0，誰比較大？

S14：3。

T：你怎麼知道？

S14：因為 0 是空空的，沒有什麼東西。

T：那 3 呢？

S14：3 有三個東西。

T：所以誰比較大？

S14：3。

整理 S14 的晤談內容，發覺：1. 過去從未學習過負數；2. 認為 0 就是「沒有」；3. 認為 0 的左邊是 00，00 的左邊還是 00，沒有負數概念；4. 視「-」為不見，忽略它的存在，直接比較數字大小；由以上 4 點判斷 S14 為初始心智模型。

訪談 S21 摘要與解析：

T：再來第四題，要把大的數字圈起來。第一，6 和 2 誰比較大？

S21：6

T：你怎麼知道？

S21：因為 6 可以減 2，2 不行減 6。

T：6 可以減 2？

S21：2 不行減 6。

T：所以呢？

S21：6 比較大。

S21 有標準的「大數才能減小數」的迷思概念，並藉此來說明數字大小理由。

T：第二題，3 和 0 誰比較大？

S21：3

T：為什麼？

S21：跟剛才說的一樣，3 可以減 0，0 不能減 3。

T：你的意思是可以減別人的那個數字就會比較怎樣？

S21：數字會比較大。

T：所以可以減別人的數字就會比較大是嗎？

S21：對

繼續使用標準的「大數減小數」的迷思概念。

T：那這個 (-1) 你之前有看過嗎？你覺得它 (-1) 應該怎麼唸？

S21：減一

T：好，那減 1 跟 5 誰比較大？

S21：5

T：為什麼？

S21：因為減 1 就是 0 減 1 的意思。

T：所以 5 會比較大？

S21：對

沒學過負數的學生都使用「減一」發音。自動推理「減 1 就是 0 減 1」。

T：那減 2 和減 6 哪個比較大？

S21：減 2

T：為什麼？

S21：因為 0 減 2 和 0 減 6，因為 0 減 2 會減得比較少。

T：0 減 6 勒？

S21：0 減 6 會減得比較多

T：減得比較多數字會怎樣？

S21：數字會比較小

整理 S21 的晤談內容，發覺：1. 認為 0 就是「沒有」；2. 因為書寫字時都是由左而右，所以認為較右邊的數字會較大；3. 利用「大數字減小數字」此規則來判斷誰大誰小；4. 稱「-」為減且認為 -1 就是 0-1、-2 就是 0-2，5. 判斷負數 vs 負數時，認為減數愈大，算出來的數值就會愈小；由以上 5 點判斷 S21 為轉變 II 心智模型。

訪談 S22 摘要與解析：

T：3 的前面是 2，2 的前面是 1，那 1 的前面是什麼？

S22：0 啊。

T：你是怎麼知道的？

S22：因為 0、1、2、3、4。

T：那 0 的前面是什麼？

S22：減 1，不是減不是減。

T：不是減？

S22：我不知道它叫什麼，我知道它的意思是什麼。

從回應中可見 S22 已經全然了解負號意義、位值，似乎剛剛理解。

S22：等下，一年級老師有教我們後就是就是 1 的後面就是 2、3，我剛把前面當作後面、後面當作前面。

T：後面、前面是老師教你的？

S22：對，一年級的。

T：好，那這個 (-1) 有教過嗎？

S：沒有阿，我寫到這裡 (第三題的第三小題) 看到這個 (-1)，才知道 0 的前面是那個符號的 1。

所以 S22 連結第三題題目使用負號，應證先前的理解，現在除了正確的「命名」負號，S22 已經舉一反三，完整認知負數概念。

T：好，在看第二小題，這是什麼數字和什麼數字？

S22：3 和 0，這最簡單，0 我告訴你一個比較難的方法，就是 0 可以加 3，3 加 0 也是 3 啦，所以就是可以跟剛剛那題一模一樣，就是 3 在後面，然後 0 在前面。

T：所以一樣就是看誰在前面、誰在後面。

S22：對。

有數字順序觀念。

T：那第三小題，這個數字和這個數字是什麼？

S22：當然阿，0 的前面是這個符號的 1(-1)。

T：嗯，然後呢？那個符號的 1 和 5 誰比較大？

S22：5，因為 0 就是沒有了，0 的前面都沒有了嘛。

T：0 的前面都沒有東西？

S22：對。

T：那那個符號的 1 在哪裡啊？

S22：在 0 的前面。

T：那你剛剛有說 0 的前面什麼都沒有。

S22：0 的前面什麼都沒有了，就是這個符號 (-1) 出現了。

T：所以 0 的前面就是會出現那個符號 (-) 囉。

S22：對。

T：那那個符號 (-) 的 1 再前面還有沒有數字啊？

S22：有，那個符號 (-) 的 2。

T：哦，有那個符號的 (-)2，那那個符號的 (-)2 再前面還有沒有數字？

S22：有，那個符號的 (-)3，如果再講下去就到一百了。

回答有些不成熟，瑕不掩瑜，S22 成熟而有自信。

S22：然後 1 的前面是 0，0 前面就有那個符號的 1，然後呢，你會不會覺得奇怪，為什麼會這樣子呢？0 的前面就是 1、2、3(在紙上寫 -1、-2、-3)。

T：你怎麼知道？

S22：我不是說我同學教我的嗎？

T：恩，所以他已經學到那個符號的 1、那個符號的 2？

S22：對。

T：你還沒學到？那你怎麼會問那個同學？

S22：因為我就突然看到那個東西，然後就問他知不知道。

T：然後他就講了一次，你就記起來了？

再連結其他經驗，自我建構概念。

T：好，那你可不可以回答第四小題，那個符號的 2 跟那個符號的 6 誰比較大？要怎麼知道？

S22：我先舉個例子，就是 2 的前面是 3、4、5、6(在紙上寫 -6、-5、-4、-3、-2)。

T：你要講那個符號，不然我會聽不懂。

S22：那個符號的 2 前面是那個符號的 3、那個符號的 4、那個符號的 5、那個符號的 6，後面是那個符號的 1、然後過來就 0~100。

T：對。

S22：就是分前後的問題。好了我講完了。

T：你還沒講完阿，誰比較大？

S22：當然是 2 囉。

T：2 囉？

S22：我剛講了前後的關係。

T：前後有什麼關係？

S22：我直接講重點好了，重點就是後面的比較大，前面的比較小。

T：哦，那就是那個符號的 6 排在最前面。

S22：不是最前面喔！

T：就是比較前面？

S22：對，就是比較前面，比那個符號的 2 還前面，所以它 (-2) 就比較大。

T：為什麼你會把它 (-) 叫做那個符號？

S22：因為我根本不知道它叫什麼名字。

T：你不知道它叫什麼名字，所以就直接講那個符號。

S22：對！

整理 S22 的晤談內容，發覺：1. 由於不知道「-」的名稱，所以直接稱為“那個符號”；2. 看到第三題中的 -1 來推測第一、二題的答案，在填寫問卷過程中學到了整數排序，並利用之前學習過的相關概念像是較後面（右邊）的數較大、較前面（左邊）的數較小等來回答問卷題目；3. 由晤談內容可判斷 S22 為正規心智模型。

訪談 S23 摘要與解析：

T：好，0 的前面是什麼？

S23：0。

T：你怎麼知道？

S23：0 的前面就沒有了。

T：0 的前面就沒有了？那你怎麼寫 0？你怎麼沒寫沒有？而寫 0？

S23：……。

T：你覺得應該是沒有還是 0？

S23：沒有。

T：所以你覺得 0 的前面是沒有東西？就是 0 就對了？

S23：對。

標準的初始階段表現。

T：那這個數字 (-1) 你覺得應該怎麼念？

S23：…………。

T：你有沒有看過這個數字 (-1)？

S23：沒有。

T：你覺得應該怎麼念？

S23：減 1。

「減 1」是普遍的命名回答。

T：好，那你覺得減 1 和 5 誰比較大？

S23：5。

T：為什麼？

S23：因為……。

T：你不知道嗎？你是用猜的嗎？

S23：不是。

T：那你是怎麼知道的？

S23：因為 5 比較大，減 1 是比較少的。

T：好，那減 2 跟減 6 誰比較大？

S23：減 6。

T：為什麼？

S23：因為……

T：你是怎麼比的？

S23：因為 6 比 2 還要大。

整理 S23 的晤談內容，發覺 1.S23 不曾接觸負數；2. 認為 0 就是“沒有，且 0 之前沒有數字存在；3. 稱「-」為減；4. 視「-」為不見，直接比較數字大小；由此可判斷 S23 為初始心智模型。

訪談 S24 摘要與解析：

T：3 的前面是 2，2 的前面是 1，1 的前面是什麼？

S24：0。

T：你怎麼知道？

S24：因為 0、1、2、3、4。

T：那 0 的前面是什麼？

S24：00。

T：你怎麼知道？

S24：用猜的。

T：所以你不知道？你用猜的？

S24：對。

樣本 S14 也是使用 00 代表 0 之前的數。

T：所以這裡（指第二題的第四格）要填什麼？

S24：3。

T：那這裡（指第二題的第二格）呢？

S24：0。

T：為什麼這裡是0？

S24：0、1、2、3、4。

T：那這裡（指第二題的第一格）呢？

S24：00。

T：為什麼這裡是00？也是用猜的？

S24：對！

T：請你講大聲一點哦，第三題把大的數字圈起來，6和2誰比較大？

回答越來越小聲，代表對內容沒信心。

T：好，第四題，這個(-2)是什麼？

S24：減2。

T：這個(-6)呢？

S24：減6。

T：那減2和減6誰比較大？

S24：減6。

T：為什麼？

S24：6比2大。

T：所以你是比數字，沒有看前面那個減？

S24：對。

T：那如果是減2和減6的話，誰比較大？

S24：減6。

整理 S24 的晤談內容，發覺：1. 認為 0 之前的數字為 00；2. 稱「-」為減；3. 視「-」為不見，直接比較數字大小；4. 越回答越沒信心。判斷 S24 為初始心智模型。

綜合訪談以及問卷回答的質性分析，國小低年級學生可能觸發形成負數概念來自：一、溫度情境，二、哥哥姊姊言論，三、問卷題目（題目敘述本身含有負數符號），四、從減法變型（ $3-5=0-2$ ），五、訪談中誘發。以上五項因素可以觸發學生自發形成負數概念。負數課程教學前，無論高屏與加州地區都有 3.8% 與 4.8% 的低年級學生，正確回答問題被歸類為正規心智模型。

（二）錯誤類型分析

經過晤談與分類的經驗後，研究者更能掌握學生紙筆回答狀況，所以整理學生的答題情況與收集錯誤類型：

1. 往前數：

3 的前面是 2、2 的前面是 1、1 的前面是（ ）、0 的前面是（ ）。錯誤類型有 (1) 多

個 0，無論多少空格，學生都填答 0。(2) 反向正數，學生依照順序或不依照順序填答正數。

分析：學生往前數到負數為正確答案（3、2、1、0、-1）。而不正確的答案包含遺漏（3、2、1、0）或是增加額外（3、2、1、0、10）的數字。

2. 數線填充：

1 的左右各 2 格填充。錯誤類型有 (1) 停在 0。(2) 多個 0。(3) 對稱，遺漏 0，-1。(4) 反向正數。

分析：學生互換正數與負數的次序（3、2、1、0、-1），雖然學生的排序觀念正確，但在數線上的數字通常是靠近右邊的數較大，靠近左邊的數較小，所以研究者視此種情況為錯誤。

3. 比大小：

2 個數字比大小。錯誤類型有 (1) 忽略負號，依照絕對值來比較大小。(2) 能正確分辨正數大於負數，卻無法分辨負數之間的大小。

分析：絕大多數的學生都是屬於第一種類型，比較整數大小，直接忽略負號，由絕對值大小判斷。題目 3-3：-1 和 5 比大小。學生選 5 的原因不明，所以建議題目修改成「-2 和 1 比大小」會更適合。

4. 選擇贏的分數：

比大小的生活情境題和前一題類型類似。

5. 溫度計：

生活情境題，學生忽略負數溫度刻度，使用視覺回答，所以幾乎都答對。

三、質的分析後再量的比較

累積以上訪談分析經驗，再檢視紙筆問卷答案與分數，按照表 2 分類，我們推論出 395 位高屏地區受測學生學生所屬的心智模型，並使用卡方適合度檢定比較本研究的心智模型與加州一年級學生的心智模型的分配比例，製作表 7。

表 7. 高屏地區受測學生與加州受測學生負整數概念心智模型分配

心智模型	高屏	加州	總和	
初始	個數	309	47	356
	期望個數	308.4	47.6	356.0
	百分比	78.2%	77.0%	78.1%
轉變 1	個數	35	5	40
	期望個數	34.6	5.4	40.0
	百分比	8.9%	8.2%	8.8%

心智模型	高屏	加州	總和	
合成	個數	28	1	29
	期望個數	25.1	3.9	29.0
	百分比	7.1%	1.6%	6.4%
轉變 2	個數	8	1	9
	期望個數	7.8	1.2	9.0
	百分比	2.0%	1.6%	2.0%
正規	個數	15	7	22
	期望個數	19.1	2.9	22.0
	百分比	3.8%	11.5%	4.8%
總和	個數	395	61	456
	期望個數	395.0	61.0	456.0
	百分比	100.0%	100.0%	100.0%

接著再進行皮爾森卡方檢定。

表 8. 負數概念心智模型分配卡方檢定

	數值	自由度	漸近顯著性 (雙尾)
Pearson 卡方	8.999a	4	.061
概似比	8.393	4	.078
線性對線性的關連	1.590	1	.207
有效觀察值的個數	456		

因為卡方統計量為 8.999， $p=0.061>0.05$ ，代表高屏地區低年級受測學生與加州一年級受測學生負數概念心智模型分配不存在顯著差異。

伍、結論與建議

一、結論

(一) 低年級受測學生普遍沒有負數概念

問卷題目 1-2 與 2-1 的答對率分別只有 12.2%、8.6%，可知低年級受測學生普遍不知道小於 0 負數之存在。

(二) 高屏地區低年級受測學生的負數概念存在地區性差異

屏東市區實驗小學與高屏海邊地區小學負數概念問題總分表現存在顯著差異，市區得分平均明顯高於郊區學校學生表現。

(三) 高屏地區二年級受測學生負數概念明顯優於一年級受測學生

一、二年級負數概念總分存在顯著差異，二年級學生平均分數明顯高於一年級。由於一、二年級均無負數概念課程，二年級負數概念高於一年級，多一年的生活與學校經驗，讓二年級的負數概念認知更成熟。

(四) 高屏地區低年級受測學生與加州一年級受測學生負整數概念沒有差異。

(五) 透過溫度情境、兄姊言論、題目敘述本身、減法變型 ($3-5=0-2$)、訪談中誘發、可以觸發少數學生自我形成正規負數概念。

美國日常生活無論「視覺」與「聽覺」，比較常接觸負數溫度氣象訊息。而臺灣相對的負數生活情境明顯的少了許多。雖然生活情境刺激強度不同，但是教學前負整數概念二者的概念並沒有差異，學生無法直接從生活情境轉化成「概念」，這支持教學的必要性。

二、建議

本研究發現一年級與二年級之負數概念存在顯著差異，可見得在認知發展形成一個階段，值得再繼續深入探究，此外也可以將負數概念問卷普測 3 至 6 年級，使研究更加完備，對國小學生的負數概念能有更進一步的了解。

本研究所有證據都指向：不牽扯到計算的「認識負數課程」可以安排在小學實施，特別適合國小高年級。所以建議下次數學課程變動時，可以考量這議題。

參考文獻

一、中文部分

- 教育部 (2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。
- 陳宜良、單維彰、洪萬生、袁媛、魏士傑、舒宇宸、姜志遠、翁婉珣、黃子倩、洪雅齡 (2005)。中小學數學科課程綱要評估與發展研究。臺北市：教育部。
- 陳嘉陽 (2012)。教育概論。臺中市：教甄策研中心。
- 黃建榮 (2004)。五、六年級負整數教學可行性之探討 (未出版之碩士論文)。國立屏東師範學院數理教育研究所。屏東縣。
- 蔡德吉 (2002)。國一學生負數概念之研究 (未出版之碩士論文)。國立高雄師範大學數學系研究所。高雄市。

二、英文部分

- Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 45, No. 2*, 194-245.
- Ginsburg, H. P., Choy, Y. E., Lopez, L. S., Netley, R. and Chau-Yuan, C. (1997). Happy Birthday to you: early mathematical thinking of Asia, South American, and US children. *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Hove, East Sussex: Psychology Press Limited.
- Hativa, N. & Cohen, D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics*. 28(4),401-431.
- Vosniadou, S. & Brewer, W. F. (1992). Mental models of the earth: A study of conceptual change in childhood. *Cognitive Psychology*, 24(4), 535-585.